# Mathematisch Begründen –

# die Logik beim Herleiten von mathematischen Sätzen

Argument

Argument

|  |  |
| --- | --- |
|  | Dieses Material wurde durch Kerstin Hein und Susanne Prediger konzipiert und kann unter der Creative Commons Lizenz 4.0 International: BY-SA-NC: Namensnennung – Weitergabe unter  gleichen Bedingungen weiterverwendet werden. |
| **Zitierbar als** | Hein, K. & Prediger, S. (2020). Mathematisch Begründen – die Logik vom Herleiten mathematischer Sätze. Unterrichtsmaterial als Open Educational Resources. Online zugänglich unter sima.dzlm.de/um/8-001 |
| **Projektherkunft** | Dieses fach- und sprachintegrierte Fördermaterial ist entstanden im Rahmen des Projekts  MuM-Beweisen (gefördert durch die Stiftung der Deutschen Wirtschaft), als Dissertationsprojekt von Kerstin Hein unter Betreuung von Susanne Prediger. |
| **Bildrechte** | Alle Grafiken sind selbst erstellt von den Autorinnen, die Personenbilder wurden von Andrea Schink gezeichnet. Einige Icons sind von <https://thenounproject.com/> und  <https://iconarchive.com/> übernommen. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A | Nutzen von Argumentationsschritten und Argumenten | |
| 1 | Winkel bestimmen am Geradenkreuz – Begründung AWie groß ist der Winkel α? Begründe deinen Lösungsweg. | |
|  | a) | Bearbeitet zu zweit die Aufgabe mündlich. |
|  |  | * Wie groß ist der Winkel α? * Warum hat der Winkel α diese Größe? * Welche Argumente habt ihr bei eurer Begründung genutzt oder könntet ihr nutzen? |
|  | b) | Schreibe allein auf, wie ihr euer Ergebnis begründet habt: |
|  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 2 | **Mathematische Argumente** | | |
|  | **Winkel-Rechen-Argument:**  **Wenn** zweiWinkel  und  sich nicht überscheiden, **dann** hat der zusammengesetzte Winkel die Größe  d.h. man kann die Winkelgrößen addieren und subtrahieren.  α (alpha), β (beta)    Winkelgröße  **Nebenwinkelargument:**  **Wenn** zwei Winkel an zwei sich schneidenden  Geraden nebeneinanderliegen,  **dann** bilden die beiden Winkel  zusammen einen Winkel von 180 Grad. (my), (delta) | Ihr habt vermutlich die folgenden mathematischen Sätze als Argumente genutzt,  vielleicht auch ohne sie zu nennen: | |
|  | a) | C:\Users\khein\Dropbox\Kerstin\Promotion\MuM-Beweisen\MuM-Beweisen Material\Figuren Mathewerkstatt\Rico_farbe.pngMacht euch gemeinsam mit den beiden Argumenten vertraut.   * Lest euch die Argumente durch. * Erklärt euch gegenseitig, was die Argumente bedeuten. * Wozu braucht man überhaupt mathematische Argumente? Was meint Rico?   Aha, wenn man mathematische Sätze als Argumente benutzt,  kann man sicher sein, dass die Begründung stichhaltig ist.  Ich kann die mathematischen Sätze wirklich immer benutzen,  wenn die Voraussetzungen erfüllt sind.  Ein bisschen so wie Werkzeuge. Sie müssen nur passen.  Rico | |
|  | b) | Kenan wundert sich über das Winkel-Rechen-Argument.  C:\Users\khein\Dropbox\Kerstin\Promotion\MuM-Beweisen\MuM-Beweisen Material\Figuren Mathewerkstatt\Leonie_farbe.pngC:\Users\khein\Dropbox\Kerstin\Promotion\MuM-Beweisen\MuM-Beweisen Material\Figuren Mathewerkstatt\Kenan_farbe.png  **Winkel-Rechen-Argument**  Ist doch logisch, dass man Winkelgrößen  addieren und subtrahieren kann.  Warum braucht man dafür extra ein Argument?  Aber geht das immer? Das klappt ja nur,  wenn die Winkel nicht überlappen, oder?  Kenan  Leonie  Überlegt gemeinsam, wann das Addieren und Subtrahieren keinen Sinn ergeben würde. | |
|  |  | Geometrisch kann man sich Winkel als Drehungen gegen den Uhrzeigersinn vorstellen, wie in der Zeichnung:   * Was passiert mit diesen Drehungen, wenn ich die  Winkelgrößen α und β addiere, also α + β rechne? * Was passiert mit den Drehungen bei α - β? Hat Leonie auch für Subtraktion Recht? |  |
| 3 | Mathematischer Werkzeugkasten 1 Name für das Argument  **Nebenwinkelargument:**  **Wenn** zwei Winkel an zwei sich schneidenden  Geraden nebeneinanderliegen,  **dann** bilden die beiden Winkel  zusammen einen Winkel von 180 Grad.  (my), (delta) | | |
|  | a) Schlussfolgerung (DANN…)  Voraussetzung (WENN...) | Mathematischen Argumente  sind immer so aufgebaut:  Zeichnung mit der  geometrischen Konstruktion     * Was genau bedeutet WENN-DANN eigentlich?   Findet eigene Beispiele. | |
|  | b) | Sätze, die schon bewiesen wurden, können wie Werkzeuge verwendet werden.   * Ergänzt gemeinsam euren mathematischen Werkzeugkasten. Dazu schneidet ihr für eure Partnerarbeit das Nebenwinkelargument und das Winkel-Rechen-Argument für euer eigenes Material aus (Kopiervorlage auf Seite 22).   **Wenn…, dann….** | |
| 4 | **Graphische Argumentationsschritte kennenlernen** | | |
|  | a) | Wenn man ein Argument benutzt, muss man wissen,  dass die Voraussetzungen im Argument (WENN…)  auch in der Aufgabe erfüllt sind.  Aus der Schlussfolgerung (DANN...) kann man schließen,  was dann auch für die Aufgabe gilt.  Voraussetzung  Voraussetzungs-Check  Argument  Schlussfolgerung   * Schneide dir drei bildlichen Argumentations- schritte aus (von der Kopiervorlage auf Seite 24).   Erinnerung an Aufgabe 1:   * Wie groß ist der Winkel α?  Begründe deinen Lösungsweg. * Versucht nun, eure Begründung zur Aufgabe 1 mit den bildlichen Argumentationsschritten zu sortieren:   Dabei können euch folgende Fragen helfen, die Felder zu füllen:  **1. Feld (Voraussetzung):** Was ist in der Aufgabe gegeben?  **2. Feld (Voraussetzungs-Check):** Ist die Voraussetzung im Argument durch die Voraussetzungen in der Aufgabe erfüllt (Wenn...“)?  **3. Feld (Argument):** Welches Argument wird in diesem Schritt genutzt?  **4. Feld (Schlussfolgerung):** Was folgt aus dem Argument für die Aufgabe oder  für das mathematische Argument? | |
|  | b) |
| 5 | **Beispiel für die Argumentationsschritte**  So strukturiert man die Begründung A aus Aufgabe 1 mit bildlichen Argumentationsschritten:  **Schlussfolgerung:** Was folgt aus dem mathematischen Argument für  die Aufgabe („…, dann…“)?  **Argument:** Welches Argument wird  in diesem Schritt genutzt?  **Wiederverwendung:** Die Zwischenschlussfolgerung in einem Schritt kann als Voraussetzung beim nächsten Schritt genutzt werden.  **Voraussetzungs-Check:** Ist die Voraus­- setzung im Argument durch die Voraus- setzungen in der Aufgabe erfüllt (Wenn...“)?  **Argument:** Welches Argument wird in diesem Schritt genutzt?  **Schlussfolgerung:** Was folgt aus dem Argument für die Aufgabe („…, dann…“)?  **Voraussetzung:**  Was ist in der Aufgabe gegeben?  Was wird vorausgesetzt?  **Voraussetzungs-Check:** Ist die Voraussetzung im Argument durch die neue  Voraussetzung aus dem Schritt davor erfüllt („Wenn...“)? | | |
|  |  | Wenn…  dann …  Wenn…  dann …  Schritte  verbinden  Nummerierung  A.1  A.2 | |
|  |  |  | |
|  | a) | * Vergleicht eure Versuche der Begründung mit den bildlichen  Argumentationsschritten aus 4 mit dieser Begründung oben: Was habt ihr schon genauso gemacht, was war noch unterschiedlich? | |
|  |  | * Was genau bedeutet Voraussetzungs-Check? * Wieso muss man ihn machen? * Wieso kann man eine Schlussfolgerung „wieder-verwenden“, was bedeutet das? | |
|  | b) | Schaut die Regeln für Argumentationsschritte in der Speicherkiste A der nächsten Seite an.   * Erklärt euch gegenseitig wie ihr die Regeln versteht. Ihr könnt dazu die ausgeschnittenen Argumentationsschritte und eure Lösungen von Aufgabe 4 und 5 nutzen. | |
|  | Speicherkiste A: Nutzen von Argumentationsschritten und Argumenten         Mathematisches Begründen folgt möglichst immer diesen Regeln: | | |
|  |  | **Regel 1:** Argumente aus dem Werkzeugkasten  Nur Argumente aus dem jeweiligen Werkzeugkasten  können in den Argumentationsschritten genutzt werden.  **Nebenwinkelargument**  Deine Notizen dazu: | |
|  |  | **Regel 2:** Ein Argumentationsschritt – ein Argument   * Jedes Argument wird in einem eigenen Argumentations- schritt genutzt.   **Nebenwinkelargument**   * Das Argument kann in das mittlere große Feld gelegt werden   oder auch reingeschrieben werden.  Deine Notizen dazu: | |
|  |  | **Regel 3:** Wiederverwendung von Zwischenschlussfolgerungen  Das letzte Feld eines Schritts kann gleich als erstes Feld  im nächsten Schritt genutzt werden, wenn die Schlussfolgerung im nächsten Schritt als Voraussetzung genutzt wird,   indem die Schritte übereinander gezogen werden.  Schritte  verbinden  Deine Notizen dazu: | |
|  |  | **Regel 4:** Anordnung der Argumentationsschritte  Die Argumentationsschritte können direkt hintereinander oder auch teilweise parallel angeordnet sein, je nach Anforderung der Aufgabe.   1. direkt hintereinander b) teilweise parallel   Deine Notizen dazu: | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 6 | Winkel bestimmen am Geradenkreuz – Begründung BWie groß ist der Winkel β? Begründe. | |
|  | a) | Bearbeitet zu zweit die Aufgabe mündlich.   * Wie groß ist der Winkel β? * Warum hat der Winkel β diese Größe? * Könnt ihr den Winkel auch NUR mit den Argumenten aus dem **Werkzeugkasten 1** ermitteln? Vielleicht kennt ihr schon weitere Argumente, aber versucht, diese zu vermeiden.  Die weiteren Argumente sollen später erst mit denen aus dem Werkzeugkasten begründet werden. |
|  | b) | Sortiert nun zu zweit eure Argumentation  mithilfe der Argumentationsschritte:   * Welche Argumente aus dem **Werkzeugkasten 1** nutzt ihr? * Wie viele Argumentationsschritte benötigt ihr also  (ein Schritt pro Argument)? * Schneidet gemeinsam entsprechend so viele Argumentations- schritte aus (aus der Kopiervorlage auf Seite 24). * Was genau gehört in welches Feld der Argumentationsschritte rein?   Schreibt gemeinsam eure Antworten in die Felder.  **Tipp:** Wenn ihr euch unsicher seid, könnt ihr das Beispiel in der Aufgabe 5  noch mal anschauen. |
|  | c) | Dokumentiert nun eure Argumentationsschritte:   * Nummeriert die Schritte eurer Begründung B (B1, B2, ...), wenn ihr alles fertig habt. * Schreibt auch in das Feld vom Argument, welches Argument ihr hier benutzt habt, damit ihr die Karten mit den Argumenten weiterverwenden könnt. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| B | Allgemeine Sätze begründen | |
| 7 | Scheitelwinkelsatz begründen – Begründung C **Wenn** sich zwei Winkel α und β  am Geradenkreuz gegenüberliegen,  **dann** sind die Winkel gleich groß.  Begründet folgenden allgemeinen mathematischen  Satz, der Scheitelwinkelsatz genannt wird:  C:\Users\khein\Dropbox\Kerstin\Promotion\MuM-Beweisen\MuM-Beweisen Material\Figuren Mathewerkstatt\Tim_farbe.pngC:\Users\khein\Dropbox\Kerstin\Promotion\MuM-Beweisen\MuM-Beweisen Material\Figuren Mathewerkstatt\Emily_farbe.png  WENN die Voraussetzung gilt, DANN gilt auch die Schlussfolgerung, egal für welche konkreten Winkel.  Der Satz ist ja jetzt anders als in Aufgabe 1 und 6 bei den  Begründungen A und B. Der ist so allgemein und nicht zu einem konkreten Winkel. Wie soll man das jetzt machen?  Emily  Tim | |
|  | Um solche allgemeinen Sätze zu begründen, muss man zeigen, wenn man die Voraussetzung hat, dass man daraus dann mit den Argumenten die Schlussfolgerung herleiten kann. | |
|  | a) | Versucht zu zweit, den Satz zu begründen.  Voraussetzung   * Welche mathematischen Argumente könnt  ihr aus dem **Werkzeugkasten 1** bei eurer  Begründung nutzen? (nur diese) * Wie könnt ihr sie anordnen, um in drei  Argumentationsschritten von der Voraussetzung  zur Schlussfolgerung zu kommen?   Schlussfolgerung   * Füllt die Argumentationsschritte wieder aus wie in Aufgabe 5. |
|  | b) | Wenn ihr fertig seid, prüft und dokumentiert eure Begründung:   * Ist die Reihenfolge der Argumentationsschritte richtig? * Nummeriert euch eure Schritte dieser Begründung C (C1, C2…), wenn ihr alles fertig habt. * Schreibt auch in das Feld vom Argument, welches Argument ihr hier benutzt habt,  damit ihr die Karten mit den Argumenten weiterverwenden könnt. |
|  | c) | Nun habt ihr einen bewiesenen mathematischen Satz, der im Werkzeugkasten zum neuen Argument werden kann.       * Schneidet euch ein leeres Argument für die mathematischen Sätze aus   (siehe Kopiervorlage auf Seite 23).   * Schreibt das umformulierte Argument auf die leere Karte. * Schreibt den Namen für das Argument oben links auf die leere Karte. |
|  |  |  |
|  |  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  | Speicherkiste B: Sprache für Argumente und Begründungen |
| *Argument* | Füllt in Einzelarbeit die Sprechblasen und den Lückentext in der Speicherkiste aus. |
| Es soll gezeigt werden, dass \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .  Wir haben \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ gegeben.  Damit haben wir hier \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_vorliegen.  Daher können wir \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_anwenden.  Das \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_-Argument besagt, dass „Wenn \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .  Daraus folgt, dass \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .  Was wir geschlussfolgert haben, können wir  im nächsten Argumentationsschritt als  Voraussetzung ansehen:  Weil damit \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ vorliegen, können wir den \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ anwenden.  Nach dem \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_-Argument gilt, dass \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .  Also gilt, dass \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .  Damit haben wir gezeigt, dass \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .  Begründet folgenden allgemeinen  mathematischen Satz, der Scheitelwinkelsatz genannt wird: |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 8 | Mathematischer Werkzeugkasten 2 | |
|  |  | Ab hier könnt ihr folgende Argumente verwenden:  **Winkel-Rechen-Argument**  **Nebenwinkelargument**  Zusätzlich:  Argument aus  Aufgabe 7    C:\Users\khein\AppData\Local\Temp\geogebra.png  **Stufenwinkelargument:**  **Wenn** zwei parallele Geraden s und t  von einer dritten Geraden geschnitten  werden,  **dann** sind die Winkel μ und δ gleich groß.  μ (my), (delta)    s‖t |
|  |  | Ergänzt gemeinsam euren mathematischen Werkzeugkasten:   * Schreibt den Namen eures Arguments aus Aufgabe **7** in das leere Feld im Werkzeugkasten. * Lest euch das Stufenwinkelargument durch. * Schneidet euch das Stufenwinkelargument für euer eigenes   **Wenn…, dann….**    Material aus (Kopiervorlage auf Seite 22). |
| 9 | Regelerweiterung | |
|  |  | **Regel 5:** Nutzung selbst geschriebener Argumente  Selbst geschriebene Argumente, die mit den Argumenten aus dem Werkzeugkasten begründet wurden, können im Werkzeugkasten ergänzt werden, und bei den Argumentationsschritten genutzt werden. |
|  |  | Schaut euch gemeinsam die **Regel 5** gemeinsam an.   * Lest euch die Regeln durch. * Erklärt euch gegenseitig, wie ihr die Regeln versteht. |
|  |  | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| C | Selbst hergeleitetes Argument nutzen | |
| 10 | **Gerade schneidet zwei parallele Geraden I – Begründung D**   Wie groß ist der Winkel β? Begründe. | |
|  | a) | Bearbeitet zu zweit die Aufgabe mündlich.   * Wie groß ist der Winkel β? * Warum hat der Winkel β diese Größe?   Welche Argumente habt ihr aus dem Werkzeugkasten 2  bei eurer Begründung genutzt oder könntet ihr nutzen?  **Hinweis:** Vielleichtkennt Ihr schon einen mathematischen Satz, aus dem ihr die Größe direkt begründen könnt. Versucht es dennoch nur mit den Argumenten aus **Werkzeugkasten 2**. Das hilft uns später, den noch nicht begründeten Satz nur mit diesen Argumenten aus dem Werkzeugkasten zu begründen. |
|  | b) | Schreibt zu zweit eure Anwendung auf die Argumentationsschritte.   * Welche Argumente von den Argumenten aus dem  **Werkzeugkasten 2** nutzt ihr?  * Wie viele Argumentationsschritte benötigt ihr also (ein Schritt pro Argument)? Schneidet entsprechend so viele Argumentationsschritte aus (siehe Kopiervorlage auf Seite 24). * Was muss in die einzelnen Felder der Argumentationsschritte rein? * Schreibt gemeinsam eure Antworten in die Felder.   **Tipp:** Schaut euch **Speicherkiste A** an. Beachtet hier insbesondere Regel 4. |
|  | c) | Dokumentation: Nummeriert euch eure Schritte D (D1, D2, …), wenn ihr alles fertig habt. Schreibt auch in das Feld vom Argument, welches Argument ihr hier benutzt habt,  damit ihr die Karten mit den Argumenten weiterverwenden könnt. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 11 | **Mathematischer Werkzeugkasten 3** | |
|  | **Gleichheitsargument**  **Wenn** für die Winkelgrößenδ, μ und π  δ = μ und μ = π gilt,  **dann** ist auch δ = π**.**  (delta), (my), (pi)    **Nebenwinkelargument**  **Stufenwinkelargument** | Ab hier könnt ihr folgende Argumente verwenden:  **Winkel-Rechen-Argument**  Argument aus  Aufgabe 7    Zusätzlich:  Das Gleichheitsargument besagt also, dass wenn ein Winkel so groß ist wie ein zweiter Winkel und der zweite Winkel so groß wie der dritte Winkel, dass dann der erste Winkel auch genauso groß ist wie der dritte Winkel.  C:\Users\khein\Dropbox\Kerstin\Promotion\MuM-Beweisen\MuM-Beweisen Material\Figuren Mathewerkstatt\Leonie_farbe.png    Leonie  Leonie |
|  |  | Ergänzt gemeinsam euren mathematischen Werkzeugkasten:   * Schreibt den Namen eures Arguments aus Aufgabe **7** in das leere Feld im Werkzeugkasten. * Lest euch das Gleichheitsargument durch. Was meint Leonie? * Schneidet euch das Gleichheitsargument für euer eigenes   **Wenn…, dann….**    Material aus (Kopiervorlage auf Seite 22). |
|  |  |  |
|  |  |  |
| 12 | **Wechselwinkelsatz begründen – Begründung E**  **Satz:** Die diagonal gegenüber- liegenden Winkel γ und α an den  parallelen Geraden g und h  sind immer gleich groß. Begründet folgenden allgemeinen mathematischen Satz,  der **Wechselwinkelsatz** genannt wird: | |
|  | a) | Formuliert zu zweit den Satz in eine WENN-DANN-Formulierung um: |
|  |  |  |
|  |  | **Tipps:**   * Schaut ein anderes mathematisches Argument aus dem Werkzeugkasten als Beispiel an. * Schaut euch **Regel 5** und **Speicherkiste A** an. |
|  | b) | Überlegt zu zweit:   * Welche mathematischen Argumente habt ihr aus dem Werkzeugkasten 3  bei eurer Begründung genutzt oder könntet ihr nutzen? |
|  | c) | Schreibt zu zweit eure Anwendung auf die Argumentationsschritte.   * Welche Argumente aus dem **Werkzeugkasten 3** nutzt ihr? * Wie viele Argumentationsschritte benötigt ihr also (ein Schritt pro Argument)? Schneidet entsprechend so viele Argumentationsschritte aus (siehe Kopiervorlage auf Seite 24). * Schreibt oder zeichnet die Voraussetzungen (WENN…) in das erste Feld vom ersten  Argumentationsschritt und die Schlussfolgerung (DANN…) in das letzte Feld vom letzten Argumentationsschritt. * Ist die Reihenfolge der Argumentationsschritte richtig?   Dokumentation: Nummeriert euch eure Schritte E (E1, E2, ...), wenn ihr alles fertig habt. Schreibt auch in das Feld vom Argument, welches Argument ihr hier benutzt habt, damit ihr die Karten mit den Argumenten weiterverwenden könnt. |
|  | d) | Schreibt zu zweit einen neuen mathematischen Satz, auf Grundlage der allgemeinen Anwendung in den Argumentationsschritten.       * Schneidet euch eine leere Karte für die Argumente aus (siehe Kopiervorlage auf Seite 23). * Schreibt den neuen mathematischen Satz in Wenn-Dann-Formulierung auf die leere Karte. * Schreibt den Namen für den Satz oben links auf die leere Karte. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 13 | **Versprachlichung von Begründungen 1** | |
|  | a) | Ihr habt nun die Felder ausgefüllt, aber kann man die Begründung gut formulieren? Findet zu zweit (erst mal mündlich) gute Formulierungen. Ihr könnt euch dazu  entlang der ausgefüllten Anwendungsstrukturen aus Aufgabenteil **12 c** die Inhalte der Felder und deren Zusammenhänge von oben nach unten erzählt.  **Tipp:** Ihr könnt die **Speicherkiste B** als Vorbild nutzen. |
|  | b) | C:\Users\khein\Dropbox\Kerstin\Promotion\MuM-Beweisen\MuM-Beweisen Material\Grafiken\Icons\Dokumente-icon_iconarchive.pngSchreibt eure Anwendung nun noch einmal alleine mit Worten auf, indem ihr eure ausgefüllten Argumentationsschritte nutzt.  Nutzt dazu ein zusätzliches Blatt Papier.    **Tipps:**   * Schaut euch eure ausgefüllten Argumentationsschritte an. * Schaut euch **Speicherkiste B** an. |
|  | c) | Gebt euch gegenseitig Rückmeldungen.   * Was gefällt euch gut am Text des anderen? * Was würdet ihr noch verbessern wollen? * Welche sprachliche Formulierung findet ihr gut? |
|  | d) | C:\Users\khein\Dropbox\Kerstin\Promotion\MuM-Beweisen\MuM-Beweisen Material\Grafiken\Icons\Dokumente-icon_iconarchive.pngÜberarbeite deinen Text mit den Rückmeldungen noch mal alleine.   * Mache Änderungen in deinem Text auf Grundlage der Rückmeldung. * Schreibe dir mit den Rückmeldungen auf, die du bekommen hast,   welche Wörter und Satzbausteine wichtig sind. |
|  |  | Wichtige Wörter und Satzbausteine: |
|  | **e)** | Übertragt nun gemeinsam die von euch gesammelten Wörter  und Satzbausteine in die Speicherkiste C auf der nächsten Seite. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Speicherkiste C: Sprache für Verschriftlichungen | |
|  |  | |
|  | **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_:** | Wichtige Wörter und Satzbausteine für die Argumentationsschritte:  Wir haben gegeben…  …können wir im nächsten Schritt nutzen.  Wichtige Wörter und Satzbausteine für mathematische Sätze:  Wenn… |
|  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 14 | Mathematischer Werkzeugkasten 4 | |
|  | **Gestreckter-Winkel-Argument:**  **Wenn** ein Winkel an einer Geraden vorliegt,  **dann** ist er 180 Grad groß. | Ab hier könnt ihr folgende Argumente verwenden:  **Winkel-Rechen-Argument**  **Nebenwinkelargument**  Argument aus  Aufgabe 7    **Stufenwinkelargument**  **Gleichheitsargument**  Zusätzlich:  Argument aus  Aufgabe 12 |
|  |  | Ergänzt gemeinsam euren mathematischen Werkzeugkasten:   * Schreibt den Namen eurer Argumente aus Aufgabe **7** und **12** in die leeren Felder im Werkzeugkasten. * Lest euch das Gestreckter-Winkel-Argument durch. * Schneidet euch das Gestreckter-Winkel-Argument für euer eigenes Material aus (Kopiervorlage auf Seite 22).   **Wenn…, dann….** |
|  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| D | **Selbst hergeleitete Argumente nutzen** | | | |
| 15 | **Winkel im Dreieck bestimmen – Begründung F** Die Gerade g ist parallel zur Seite AB.Wie groß sind alle Winkelmaße im Dreieck ABC zusammen?Begründe! | | | |
|  | a) | | Bearbeitet zu zweit die Aufgabe mündlich.   * Wie groß sind die Winkelmaße im Dreieck ABC zusammen? * Welche Argumente habt ihr aus dem **Werkzeugkasten 4** bei eurer Begründung genutzt oder könntet ihr nutzen?   **Hinweis:**  Ihr kennt sicher schon ein Argument. Versucht es dennoch mit den Argumenten aus dem **Werkzeugkasten 4**. | |
|  | b) | | Schreibt zu zweit eure Anwendung auf die Argumentationsschritte.   * Welche Argumente aus dem Werkzeugkasten 4 nutzt ihr? * Wie viele Argumentationsschritte benötigt ihr also (ein Schritt pro Argument)? Schneidet entsprechend so viele Argumentationsschritte aus (siehe Kopiervorlage auf Seite 24). * Was muss in die einzelnen Felder der Argumentationsschritte rein? * Schreibt gemeinsam eure Antworten in die Felder.   **Dokumentation:** Nummeriert euch Eure Schritte F (F1, F2, ...), wenn ihr alles fertig habt. Schreibt auch in das Feld vom mathematischen Argument, welches Argument ihr hier benutzt habt, damit ihr die Karten mit den mathematischen Argumenten weiterverwenden könnt. | |
| 16 | | **Innenwinkelsummensatz im Dreieck begründen – Begründung G**  **C:\Users\khein\Dropbox\Kerstin\Promotion\Designexperimente\3. Zyklus\Winkelinnensumme Dreieck allgemein.png** Begründet folgenden mathematischen In jedem Dreieck ABC sind die  Winkel α, β und γ  zusammen 180° groß. Satz, der Innenwinkelsummensatzgenannt wird: (Die Gerade k durch B ist parallel zur Seite AC.) | | |
|  | | a) | | Formuliert zu zweit den Satz in eine WENN-DANN-Formulierung um: |
|  | |  | |  |
|  | |  | | **Hinweis:** Wenn ihr euch unsicher seid, könnt ihr  andere Argumente aus dem Werkzeugkasten anschauen. |
|  | | b) | | Bearbeitet zu zweit die Aufgabe mündlich.   * Wie kann man den Satz begründen? * Welche Argumente habt ihr aus dem **Werkzeugkasten 4** bei eurer Begründung genutzt oder könntet ihr nutzen? |
|  | | c) | | Schreibt zu zweit eure Anwendung auf die Argumentationsschritte.   * Schneidet so viele Argumentationsschritte aus wie ihr benötigt (siehe Kopiervorlage auf Seite 24). * Schreibt oder zeichnet die Voraussetzungen (WENN...) in das erste Feld vom ersten Argumentationsschritt und die Schlussfolgerung (…DANN) in das letzte Feld vom letzten Argumentationsschritt.   Dokumentation: Nummeriert euch eure Schritte **G** (G1, G2, ...), wenn ihr alles fertig habt. Schreibt auch in das Feld vom mathematischen Argument, welche Argumente ihr hier benutzt habt, damit ihr die Karten mit den mathematischen Sätzen weiterverwenden könnt. |
|  | | d) | | Schreibt zu zweit ein neues mathematischen Argument auf Grundlage der allgemeinen Anwendung in den Argumentationsschritten.       * Schneidet euch eine leere Karte für die mathematischen Sätze aus   (siehe Kopiervorlage auf Seite 23). |
|  | | e) | | Versprachlicht eure allgemeine Anwendung zu zweit mündlich.  **Tipp:** Schaut euch **Speicherkiste C** an. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 17 |  | **Versprachlichung von Begründungen 2** |
|  | a) | C:\Users\khein\Dropbox\Kerstin\Promotion\MuM-Beweisen\MuM-Beweisen Material\Grafiken\Icons\Dokumente-icon_iconarchive.pngSchreibt eure Anwendung nun noch einmal alleine mit Worten auf,  indem ihr eure ausgefüllten Argumentationsschritte nutzt.  Nutzt dazu ein zusätzliches Blatt Papier.  **Tipps:**   * Schaut euch eure ausgefüllten Argumentationsschritte an. * Schaut euch **Speicherkiste C** an. |
|  | b) | Gebt euch gegenseitig Rückmeldungen: |
|  | c) | C:\Users\khein\Dropbox\Kerstin\Promotion\MuM-Beweisen\MuM-Beweisen Material\Grafiken\Icons\Dokumente-icon_iconarchive.pngÜberarbeite deinen eigenen Text mit den Rückmeldungen:   * Mache Änderungen in deinem Text auf Grundlage der Rückmeldung. * Schreibe aufgrund deiner Rückmeldungen, die du bekommen hast,  auf, welche Wörter und Satzbausteine wichtig sind. |
|  |  | Wichtige Wörter und Satzbausteine: |
|  | d) | Ergänzt nun gemeinsam die von euch gesammelten Wörter und  Satzbausteine in die **Speicherkiste C** (Seite 15). |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 18 | **Mathematischer Werkzeugkasten 5** | |
|  |  | Ab hier sind folgende mathematische Argumente in eurem Werkzeugkasten:          **Winkel-Rechen-Argument**  **Nebenwinkelargument**  Argument aus  Aufgabe 7    **Gleichheitsargument**  **Stufenwinkelargument**  Argument aus  Aufgabe 12c/d  **Gestreckter-Winkel-Argument**  Argument aus  Aufgabe 16  Zusätzlich: |
|  |  | Ergänzt gemeinsam euren mathematischen Werkzeugkasten:   * Schreibt den Namen eurer Argumente aus den Aufgaben 7, 12 und 16  in die leeren Felder im Werkzeugkasten. |
| **19** | **Aufbau mathematischer Argumente** | |
|  |  | **A.** Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist,  dann ist sie auch durch 3 teilbar.  **B.** Hat ein Dreieck drei 60 Grad-Winkel,  so ist es gleichseitig. |
|  | a) | Erkläre alleine die beiden Teile der mathematischen Argumente.   * Woran erkennst du die Voraussetzung im Argument? * Woran erkennst du die Schlussfolgerung im Argument? |
|  |  | **A.**  **B.** |
|  |  |  |
|  | b) | Gebt euch gegenseitig Rückmeldungen. |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 20 | Aufbau der Werkzeuge im mathematischen Werkzeugkasten **:**    **:** | | | | |
|  | Ordnet gemeinsam eure Argumente noch mal den einzelnen Erweiterungen des Werkzeugkastens zu:   * Ergänzt eure Argumente noch in den leeren Feldern. * Überlegt gemeinsam, welches Argument mit welchem Argument begründet wurde. * Verbindet die Argumente, die ihr genutzt habt, mit den Argumenten, die ihr daraus hergeleitet habt mit Pfeilen (wie schon im Beispiel für das Argument aus Aufgabe 7**).** | | | | |
| **Werkzeugkasten 5** |  |  |  |  | Mit Ende der Aufgabe 16: |
| **Werkzeugkasten 4** |  | Ab Aufgabe 12:  **Gestreckter-Winkel-Argument** |
| **Werkzeugkasten 3** | Ab Aufgabe 11:  **Gleichheitsargument** |
| **Werkzeugkasten 2** | Ab Aufgabe 7:  **Stufenwinkelargument** |
| **Werkzeugkasten 1** | Ab Aufgabe 3:  **Winkel-Rechen-Argumente**  **Nebenwinkelargument** |

|  |  |
| --- | --- |
| http://icons.iconarchive.com/icons/icons8/ios7/64/Editing-Cut-Filled-icon.png | Mathematische Argumente zum Ausschneiden   **Wenn…, dann… .** |
| **Nebenwinkelargument:**  **Wenn** zwei Winkel an zwei sich schneidenden  Geraden nebeneinanderliegen,  **dann** bilden die beiden Winkel  zusammen einen Winkel von 180 Grad. (my), (delta) |  |
| Ab  Aufgabe 3 | **Winkel-Rechen-Argument:**  **Wenn** zweiWinkel α und β sich nicht überschneiden,  **dann** hat der zusammengesetzte Winkel  die Größe d.h. man kann  die Winkelgrößen addieren und subtrahieren.  α (alpha), β (beta) |
| Ab  Aufgabe 8 | s‖t  **Stufenwinkelargument:**  **Wenn** zwei parallele Geraden s und t  von einer dritten Geraden geschnitten werden,  **dann** sind die Winkel μ und δ gleich groß.    (my), (delta) |
| Ab  Aufgabe 11 | **Gleichheitsargument:**  **Wenn** für die Winkelgrößenδ, μ und π  δ = μ und μ = π gilt,  **dann** ist auch δ = π**.**  (delta), (my), (pi) |
| Ab  Aufgabe 14 | **Gestreckter-Winkel-Argument:**  **Wenn** ein Winkel an einer Geraden vorliegt,  **dann** ist er 180 Grad groß. |

|  |  |
| --- | --- |
| http://icons.iconarchive.com/icons/icons8/ios7/64/Editing-Cut-Filled-icon.png | Mathematische Argumente zum Ausschneiden und Selbstformulieren   **Wenn…, dann… .** |
|  |  |
| Aufgabe 7Aufgabe 12Aufgabe 16 | **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**  **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**  **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**  **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_** |

|  |  |
| --- | --- |
|  | Druck- oder Kopiervorlage:  Graphische Argumentationsschritte |
|  | (2-4 Stück pro Aufgabe benötigt) |
|  |  |